DIFERENCIALES

1.1 OBJETIVOS

Finalizada la unidad, el estudiante estará en capacidad de.

Definir y diferenciar los diferenciales de una variable y de una función

Establecer la equivalencia entre el diferencial de una variable independiente y su correspondiente incremento

Calcular los cambios que se producen en las funciones cuando varía la variable independiente

Identificar el concepto de derivada como como un cociente de diferenciales

Dar significado a las diferenciales y aplicarlos en la resolución y planteamiento de problemas

1.2 INTRODUCCION

En el cálculo diferencial, la expresión no es considerada una fracción de numerador dy y denominador dx, es tomado como un símbolo que denota el límite de la expresión cuando tiende a cero; cuando son tomados de forma separada se les llama diferenciales de Y y de X respectivamente, los cuales son utilizados en la solución de muchos problemas de ingeniería, administración, economía y matemática misma.

1.3 DEFINICIONES

Si es una función continua en un intervalo , es usual representar los cambios en la variable razón de cambio en señalar que cuando la variable independiente pasa de , es decir, , la función entonces experimenta un cambio real dado por la expresión , es decir, el valor que toma la función en el punto final menos su valor en el punto inicial.

Ejemplo: Dada la función , halla el cambio real cuando x pasa de 2 a 2.3

Solución: Los datos muestran que , entonces al reemplazar en la fórmula anterior = , esto significa que cuando la variable independiente crece 0.3, la función aumenta 0.9

Ejemplo 2: Halla el cambio real en la función cuando x pasa de 3 a 2.89

Solución: Los datos muestran que , entonces al reemplazar en la fórmula anterior, = lo anterior significa que la función decreció 0.7

1.4 APROXIMACION POR DIFERENCIALES

Si el cambio en la variable independiente es suficientemente pequeño, entonces el cambio en y = razón de cambio en y con respecto a x por cambio en x; para estos valores , por tanto se define el diferencial de y como , esto es, la diferencial de y es igual a la derivada de f por el diferencial de x.

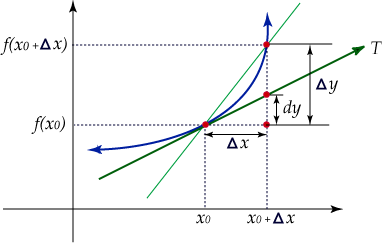
Desde el punto de vista geométrico, representa la tangente a la gráfica de en el punto

En la siguiente ilustración se muestra como aproximar la función f por su recta tangente.

Es claro que si tiende a cero, entonces la diferencia entre se vuelve tan pequeña como se desee

En el gráfico, si llamamos al ángulo entre la tangente y la horizontal, puede observarse que , por tanto

En conclusión, si es una función continua en un intervalo , el diferencial de y está dado por y el diferencial de x como



|  |
| --- |
| Ejemplo: Dada la función , halla el cambio aproximado si x varía de 4 a 4.05  Solución: Es claro que , entonces aplicando lo visto anteriormente se tiene que , entonces el cambio aproximado es  1.5 APROXIMACION AL CAMBIO PORCENTUAL  Por error o cambio porcentual se entiende el cambio de una cantidad con respecto a la cantidad inicial, es decir, cambio porcentual , entonces ; luego la expresión general es y es el cambio relativo  Ejemplo: En una fábrica de computadores, la producción diaria está dada por unidades, en donde x representa la inversión de capital de la fábrica.  ¿Qué incremento porcentual genera en la producción un aumento del 1% en la inversión de capital?  Solución: Los datos muestran que , , aplicando lo visto anteriormente se tiene |

1.6 ALGUNAS OBSERVACIONES GENERALES

Al hablar de cambio aproximado, es claro que se trata de buscar dy

La expresión valor aproximado equivale a y + dy

EJERCICIOS RESUELTOS: Usa la teoría tratada para resolver los siguientes problemas

1: Utiliza diferenciales para calcular el valor aproximado de

Solución: Inicialmente se construye una función general para el enunciado dado, en este caso, , por lo tanto ; seguidamente se le asigna a la variable independiente x el valor del cuadrado perfecto más próximo a 48, en este caso 49, por lo tanto entonces al reemplazar en se tiene . Entonces aplicando valor aproximado, esto es, y + dy se tiene

Ejemplo 2: Un vehículo se mueve según la relación +t, en donde S representa el espacio recorrido en metros y t el tiempo medido en segundos. Encuentra la distancia aproximada recorrida entre los 7 y segundos.

Solución: Aquí y

Ejemplo 3: ¿En cuánto aumentará aproximadamente el lado de un cuadrado si su área pasa de a

Solución: En este caso se tiene que y se pide calcular dl

La función general pertinente es

1.7: TALLER GENERAL: Usa la teoría tratada y tu saber para resolver los ejercicios y problemas

1: Calcula el valor aproximado en cada caso. 1.1) 1.2) 1.3)

1.4) 1.5) 1.6) 1.7) 1.8)

2: La ganancia por las ventas de paquetes de carne fría en un supermercado está dada por la expresión pesos, en donde x representa la cantidad producida

Encuentra el cambio aproximado en la ganancia si la cantidad producida cambia de 35 38 paquetes.

3: Se quiere construir un recipiente de forma cúbica de 8cm. de arista para envasar cierta bebida, ¿cuál es el valor aproximado del error que puede cometerse al calcular el volumen del recipiente, si se comete un error de 0.02cm?

4: ¿En cuánto aumentará aproximadamente el volumen de una esfera, si su radio de 15cms aumenta 0.02cm?

5: Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta desde 5cm a 5.05cm. ¿Cuál es el incremento de dicho disco?

5: La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es . Halla el precio aproximado cuando se demandan 24 unidades.

6: Calcular el incremento del área del cuadrado de 2 m de lado, cuando se aumenta 1mm su lado.

7: Hallar la variación de volumen que experimenta un cubo, de arista 20 cm, cuando ésta aumenta 0.2 cm su longitud.

8: Hallar la diferencial de la función +Cosx

9: Determinar aproximadamente en cuanto aumentará el área de un cuadrado cuando su lado aumenta de 44 cm a 4.14.1 cm

10: Usando diferenciales, calcular el valor aproximado del área de un círculo cuyo radio es igual a 3.02 cm.

11: Hallar la variación de volumen que experimenta un cubo, de arista 20 cm, cuando ésta aumenta 0.2 cm su longitud.

12: Estimar que le sucede al volumen de un cubo si la longitud de la cada lado se disminuye en un 2%.

13. Estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.005cm de espesor a un domo de hemisférico que tiene un diámetro de 50cm

14: Un estudio de productividad del turno matinal en cierta fábrica indica que un trabajador promedio que llega a las ocho de la mañana habrá ensamblado una cantidad de radios por x número de horas mas tarde. ¿Cuántos radios ensamblará aproximadamente entre las 9 y 9:15am?

15: Un melón esférico tiene una corteza de de pulgada de espesor y un diámetro interno de ocho pulgadas. Estimar que porcentaje del volumen total del melón corresponde a la corteza.

16: Se proyecta que la población de cierto pueblo dentro de t años será miles de habitantes.

¿En cuánto aumentará aproximadamente la población durante el siguiente trimestre?